



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.

IN34A Optimización
Profesores: Guillermo Durán.
Richard Weber.
Auxiliares: S. Guzmán. M. Pereira.
M. Pulido. X. Schultz.

Auxiliar Extra 17 de Noviembre de 2005

Problema 1

Durante el mes t ($t = 1, \dots, T$) una botillería se enfrenta a una demanda de d_t unidades de su producto artesanal "Pistol-Cola". El costo de producción de los insumos para producir tan singular brebaje durante el mes t tiene dos componentes. En primer lugar, se incurre en un costo de $C_t(x_t)$ si se producen x unidades en el mes t . Segundo, si el nivel de producción de la empresa durante el mes $t-1$ es x_{t-1} y el nivel de producción durante el mes t es x_t , entonces se incurrirá, durante el mes t , en un costo de suavizamiento o atenuación igual a $A \cdot |x_t - x_{t-1}|$. Al final de cada mes se incurre en un costo de almacenamiento de h_t , por unidad. Adicionalmente se incurre en un costo de I_t por cada unidad de demanda insatisfecha durante el mes t , la cual se desplazará para el mes siguiente, es decir, si se tienen y clientes insatisfechos el mes t , la demanda en el mes $t+1$ será $d_{t+1} + y$. El costo de terminar el período de planificación con algún cliente insatisfecho es muy alto. Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de S_1 productos y que la producción del mes 0 fue x_0 .

Plantee un modelo de programación dinámica que permita a la empresa maximizar las ganancias en los próximos T meses.

Problema 2

El inminente inicio de las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol de Alemania 2006, con el partido de la roja el próximo 7 de septiembre en Buenos Aires contra la poderosa selección trasandina, tiene muy preocupado al técnico Juvenal Olmos. Como no quiere dejar ningún detalle librado al azar, ha decidido contratar a Giuseppe Mandinga, director de la consultora de Armijo Catalán y principal especialista chileno en programación entera, para que lo asesore en la confección de un modelo que entregue información que pueda ayudar a la roja en su objetivo de llegar a Alemania 2006. Luego de darle vueltas al problema, Mandinga no ha podido resolver el problema que tiene entre manos y conociendo el mal humor de Armijo, ha decidido recurrir a los alumnos de Optimización de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile para que lo apoyen. Para esto, usted debe recordar que las eliminatorias son jugadas por 10 equipos, que los 4 primeros clasifican para Alemania y que el sistema es de partido y revancha (ida y vuelta). La asignación de puntaje es: 3 puntos por victoria y 1 punto por empate. Con esta información se le pide:

- 1) Diseñe un modelo de programación entera que antes de realizada la primera fecha de las eliminatorias indique cuál es la mayor cantidad de puntos con que la escuadra chilena puede no clasificar para Alemania 2006.

- 2) Si una vez concluida la primera fecha la roja logra ganar a la ya no tan poderosa selección trasandina, como incorporaría esta información al modelo. Y si el resultado fuese un empate?(1 punto)
- 3) Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, qué respuesta le daría a Juvenal Olmos si este quiere saber con cuantos puntos tiene Chile garantizada su clasificación. (1 punto)

Problema 3

Responda las siguientes preguntas:

1. Indique por qué es necesario validar un modelo matemático. Explique como se realiza en la práctica la validación.
2. Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.
3. Explique como puede resolverse un sistema de ecuaciones lineales aplicando el algoritmo simplex.
4. Discuta si tiene o no sentido plantear el concepto de precio sombra en un problema de programación lineal entera.
5. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van dependiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).

Solución:

Pregunta 1

La idea de la Programación Dinámica sigue un determinado procedimiento. En general, para la resolución haremos lo siguiente:

- Definición de Etapas
- Definición de variables de estado
- Definición de las variables de decisión
- Definición de las ecuaciones de recurrencia
- Fijar las condiciones de borde

Por lo tanto desarrollaremos para este problema los pasos mencionados.

Definición de Variables

Etapas

Meses en el estudio $t = 1, 2, 3, \dots, T$

Estados

S_t = Inventario al comienzo del mes t

X_{t-1} = Producción del Mes Anterior

D_t = Demanda real a enfrentar en el mes t

Variables de Decisión

X_t = Cantidad a producir en el mes t

Y_t = Cantidad de personas a dejar insatisfecha en el mes t

Asumamos que cuando hablamos de demanda real es la demanda d_t asociada a la etapa o mes, más las demandas rezagadas en periodos anteriores, y_t .

Ecuación de Recurrencia

Sea

$U(X_{t-1}, D_t, S_t; X_t, Y_t)$, Beneficio acumulado al periodo t si se llega con X_{t-1}, D_t y S_t como estado de la etapa y se toman X_t y Y_t como decisiones.

$U^*(X_{t-1}, D_t, S_t)$, Beneficio Máximo acumulado del periodo $T+1$ si se llega en el estado definido por las variables respectivas.

En base a lo anterior podemos generar la ecuación de recurrencia.

- Mes $T+1$

Necesitamos determinar alguna condición de parada de nuestra recurrencia. Si nos basamos en lo que nos dice el enunciado: *"El costo de terminar el periodo de planificación con algún cliente insatisfecho es muy alto"*, podemos determinar que la condición para el mes último es,

$$U(X_T, D_T, S_{T+1}; X_T, Y_T) = \begin{cases} -\infty & \text{Si } D_{T+1} > 0 \\ 0 & \text{Si } D_{T+1} = 0 \end{cases}$$

Esto nos quiere decir que si la demanda en el periodo $T+1$, es decir el último o por definición de condición de borde, la posterior a la última esto nos generaría una utilidad muy mala debido al alto costo que esto trae consigo. Nuestra idea podría ser intentar no dejar clientes insatisfechos, luego debemos considerar la condición cuando se llega a este periodo sin clientes insatisfechos.

Es fácil ver que acá conseguimos generar una etapa de término para conseguir comparar los escenarios existentes.

Continuando con las etapas restantes tenemos.

- Mes t

En ese caso debemos reconocer los términos que se presentan en cada etapa t . Como estamos hablando de utilidades, los términos correspondientes a costos los anotaremos como valores negativos.

Los términos presentes en cada etapa son los siguientes:

Costo de Producción

Este término es dependiente de lo que se produzca solo en el periodo en cuestión por lo tanto lo representamos así

$$- C_t(X_t)$$

Costo de suavizamiento o atenuación

Este término tiene dependencia directa de dos etapas, en la producción que se haya realizado en estas, pero solamente del número de la etapa en la que uno se encuentra y no de los estados que tenía esta. Por lo tanto la podemos especificar de la siguiente manera.

$$- A \cdot |x_t - x_{t-1}|$$

Costo de almacenamiento

Esta variable se hace presente si la cantidad de producción en la etapa respectiva más el nivel de inventario presente son mayores a las demandas a las que se enfrenta la botillería. Por lo tanto debemos tener en consideración este supuesto. Luego este término lo especificamos de la siguiente manera.

$$- h_t \cdot (X_t + S_t - (D_t + Y_t))$$

Costo por demanda insatisfecha

Este costo se hace presente solo cuando el valor de y_t no es nulo. Por lo tanto debemos considerar la siguiente estructura para este término.

$$- I_t \cdot Y_t$$

Utilidad Acumulada Máxima

En esta etapa debemos representar la relación existente entre las etapas dentro de la recurrencia. Por lo tanto necesitamos determinar como varían las

variables de estado de una etapa a otra. Por lo cual podemos reunir todos los términos antes mencionados para generar la estructura de la programación matemática¹.

$$\begin{aligned} U^*(X_t, D_{t+1} + Y_t, X_t + S_t - (D_t + Y_t)) = \\ - C_t(X_t) - A \cdot |x_t - x_{t-1}| - h_t \cdot (X_t + S_t - (D_t + Y_t)) - I_t \cdot Y_t \\ + U^*(X_t, D_{t+1} + Y_t, X_t + S_t - (D_t + Y_t)) \end{aligned}$$

Viendo esto debemos recordar que

$$U^*(X_{t-1}, D_t, S_t) = \max_{X_t, Y_t} \{U(X_{t-1}, D_t, S_t; X_t, Y_t)\}$$

Debemos recordar algunos de los supuestos que se necesitaban para proceder.

s.a

$X_t \geq 0$	Producción positiva
$D_t \geq Y_t \geq 0$	No más insatisfechos que la demanda total.
$S_t + X_t \geq D_t + Y_t$	La Oferta mayor que la demanda en cada periodo.

Pregunta 2

El inminente inicio de las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol de Alemania 2006, con el partido de “la roja” el próximo 7 de septiembre en Buenos Aires contra la poderosa selección trasandina, tiene muy preocupado al técnico Juvenal Olmos. Como no quiere dejar ningún detalle librado al azar, ha decidido contratar a Giuseppe Mandinga, director de la consultora de Armijo Catalán y principal especialista chileno en programación entera, para que lo asesore en la confección de un modelo que entregue información que pueda ayudar a “la roja” en su objetivo de llegar a Alemania 2006. Luego de darle vueltas al problema, Mandinga no ha podido resolver el problema que tiene entre manos y conociendo el mal humor de Armijo, ha decidido recurrir a los alumnos de Optimización de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile para que lo apoyen. Para esto, usted debe recordar que las eliminatorias son jugadas por 10 equipos, que los 4 primeros clasifican para Alemania y que el sistema es de partido y revancha (ida y vuelta). La asignación de puntaje es: 3 puntos por victoria y 1 punto por empate. Con esta información se le pide:

1. Diseñe un modelo de programación entera que antes de realizada la primera fecha de las eliminatorias indique cuál es la mayor cantidad de puntos con que la escuadra chilena **puede no clasificar** para Alemania 2006. (4 PUNTOS)

Solución:

a) **Variables:**

x_{ij} : cantidad de partidos que el equipo i le gana al equipo j .

y_i : si el equipo i tiene los mismos o más puntos que “la roja”.

p_i : cantidad de puntos que tiene el equipo i .

b) **Función Objetivo:**

$$\text{máx } P_1$$

Donde $i = 1$ es “la roja”.

c) **Restricciones:**

- 1) Combinación de resultados posibles.

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 2 \quad \forall i, j \text{ tal que } i \neq j.$$

- 2) Cálculo de los puntos de cada equipo.

$$P_i = 3 \sum_{j \neq i} x_{ij} + \sum_{j \neq i} (2 - (x_{ij} + x_{ji})) \quad \forall i.$$

- 3) Obligar a la variable y_i a tomar valor cero cuando corresponda.

$$P_1 - P_i \leq M(1 - y_i) \quad \forall i.$$

- 4) Obligar a la variable y_i a tomar valor uno cuando corresponda.

$$P_i - P_1 \leq M(y_i - 1) \quad \forall i.$$

- 5) Condición para quedar eliminado.

$$\sum_{i \neq 1} y_i \geq 4$$

- 6) Naturaleza de las variables.

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall i, j.$$

$$P_i \geq 0 \quad \forall i.$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$

2. Si una vez concluida la primera fecha “la roja” logra ganar¹ a la ya no tan poderosa selección trasandina, como incorporaría ésta información al modelo. ¿Y si el resultado fuese un empate? (1 punto)

Solución: Para ello es necesario agregar como restricciones el resultado. La restricción asociada a un triunfo de “la roja” se escribiría de la siguiente manera, asumiendo que la selección trasandina esta asociada a 2: $x_{12} \geq 1$. En caso que el resultado fuera un empate, se deben agregar las siguientes restricciones: $x_{12} \leq 1$ y $x_{21} \leq 1$.

3. Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, qué respuesta le daría a Juvenal Olmos si éste quiere saber con cuántos puntos tiene Chile garantizada su clasificación. (1 punto)

Solución: Como se ha visto, el modelo entrega la mayor cantidad de puntos que puede obtener un equipo y aún así tener posibilidades de no clasificar para el mundial. Dado esto, al resultado obtenido (P_1^*) se le debe agregar un punto más, con lo cual se obtiene la cantidad de puntos que asegura la clasificación.

Sugerencia: puede utilizar dentro del modelo una variable para cada equipo rival de Chile que valga 1 si el conjunto tiene igual o más puntos que la “roja” en ese momento, y 0 en caso contrario.

Pregunta 3

1. Indique por qué es necesario validar un modelo matemático. Explique como se realiza en la práctica la validación.

RESPUESTA: Al construir un modelo matemático generalmente se deben hacer aproximaciones o simplificaciones: Ellas deben ser tales que no disminuyan sustancialmente la representatividad del modelo. La validación tiene por propósito verificar una razonable representatividad del modelo. La validación puede efectuarse con :

- Uso de información histórica. Se alimenta el modelo con parámetros del pasado y se ve si éste reproduce o no el comportamiento histórico.
- Experimentación. Se cambian artificialmente los parámetros del modelo y se analiza si la respuesta del modelo es concordante con los cambios anteriores.

2. Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.

RESPUESTA: El óptimo del problema lineal debe cumplir las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Si un punto es interior, todas las restricciones son no activadas. Luego $\mu_i = 0$ para todo i .

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ \mu_i g_i(x^*) &= 0 \quad \forall i.\end{aligned}$$

esto no se puede cumplir ya que existe al menos un $c_i > 0$, con lo cual se llega a una contradicción. Luego un punto interior no puede cumplir Karush-Kuhn-Tucker.

3. Explique como puede resolverse un sistema de ecuaciones lineales aplicando el algoritmo simplex.

RESPUESTA: Se deben seguir los siguientes pasos:

- Definir una variable artificial por ecuación.
- Cada variable original reemplazarla por la resta de 2 variables no negativas.
- Definir la función auxiliar.
- Se resuelve una FASE 1.

4. Discuta si tiene o no sentido plantear el concepto de precio sombra en un problema de programación lineal entera.

RESPUESTA: Matemáticamente los precios sombra se definen como:

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta b_i}$$

con $\Delta b_i \neq 0$.

Si la solución óptima no tiene restricciones activas entonces el precio sombra es siempre nulo. Si tiene alguna restricción activa entonces el precio sombra tendrá valores distintos si Δb_i (∂b_i) es positivo o negativo, siendo siempre uno de ellos nulo. Dado esto, el concepto no tiene sentido en programación lineal entera.

5. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).

RESPUESTA: Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.